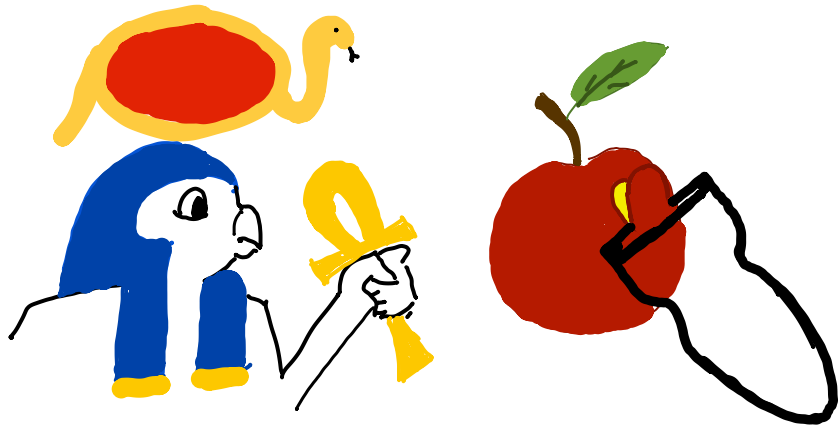


Infos: $\hookrightarrow$ Prendre des exos jusqu'à 10h

$\hookrightarrow$ Eval des cours : globalement ok, on regarde le détail mercredi



Suite convergente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$$

Critères de convergence

2 gendarmes

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ \& } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$$

$$|y_n - l| \leq a_n \text{ \& } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$$



Théorème 3.22 (suites monotones bornées)

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. Si (x_n) est croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) elle converge vers $\sup(x_n)$ (resp $\inf(x_n)$)

Théorème 3.23 (critère de d'Alembert)

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et telle que la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l \text{ existe.}$$

Alors,

(i) si $l < 1$, (x_n) converge vers 0

(ii) si $l > 1$, (x_n) diverge

(iii) si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème 3.24

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. Alors, (x_n) converge si et seulement si (x_n) est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, m \geq N \quad |x_n - x_m| \leq \varepsilon$$

Quel critère utiliser quand ?

2 gendarmes : travailler bien avec les inégalités :

$$0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}, \quad |\sin(n)| \leq 1$$

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}, \quad |\cos(n)| \leq 1$$

Monotones bornées

Si aucune chance de décider ℓ

& Suites définies par récurrence (§ 3.7)

d'Alembert

termes du style $x^n, n!$

Exemples 3.25

(i) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(x_n) est croissante et majorée $\Rightarrow$ elle converge et on définit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(ii) Soit (x_n) une suite croissante. Alors les 3 conditions suivantes sont équivalentes

(a) (x_n) diverge

(b) (x_n) n'est pas majorée

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

Idem si (y_n) est décroissante, alors, les 3 conditions suivantes sont équivalentes:

(a) (y_n) diverge

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$

(b) (y_n) n'est pas minorée

(iii) Soit (x_n) définie par $x_n = \frac{\alpha^n}{n!}$

d'Alembert:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left| \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{\alpha^n}{n!} \right|} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{|\alpha|^{n+1}}{|\alpha|^n} = \frac{1}{n+1} |\alpha| \rightarrow 0 < 1$$

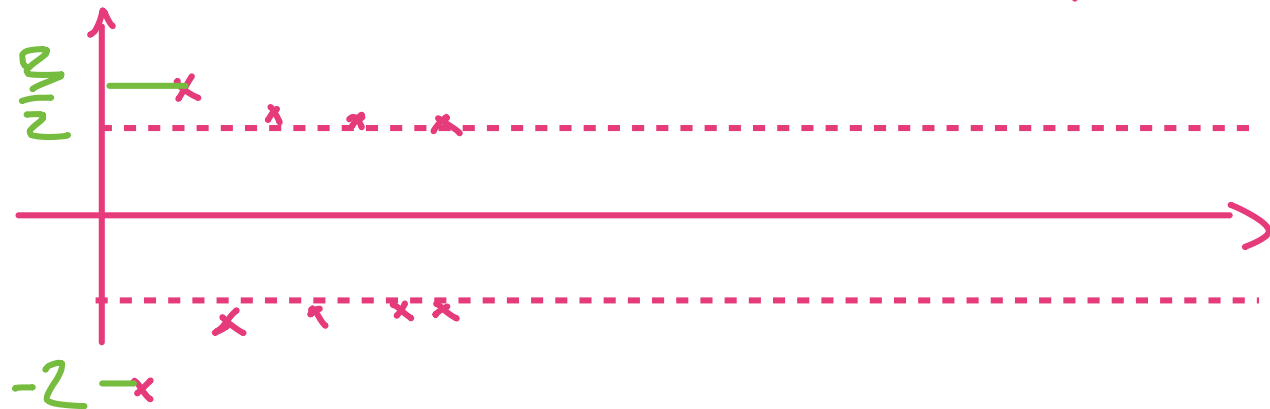
$\rightarrow (n+1)! = (n+1) \cdot n!$

d'Alembert
 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$$

§ 3.4 Sous-suites, limsup & liminf

Soit (x_n) définie par $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$



Définition 3.30 (sous-suites, points d'accumulation)

Soit (x_n) une suite.

(i) Une sous-suite est la donnée d'une suite d'indices

$(n_k)_{k \geq 0}$ tq $\mathbb{N} \xrightarrow{(n_k)} \mathbb{N} \xrightarrow{(x_{n_k})} \mathbb{R}$  Garder qu'une partie de la suite

- $\forall k \geq 0, n_k \in \mathbb{N}$
- $\forall k \geq 0, n_{k+1} > n_k \quad (\Leftrightarrow n_{k+1} \geq n_k + 1)$

La sous-suite est alors $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ et on note $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de la suite (x_n) si

$$\exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n) \text{ tq } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lambda.$$

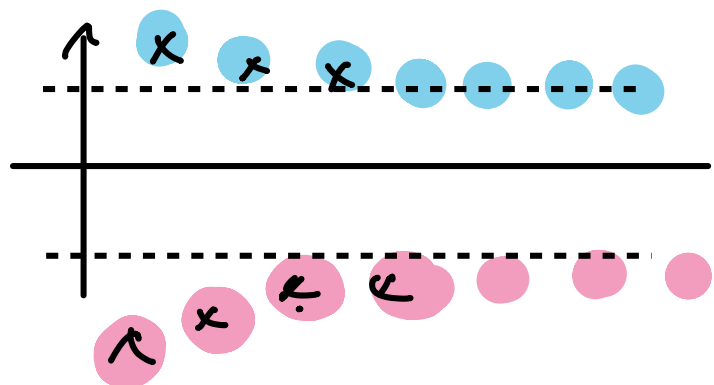
Remarque 3.31

La suite d'indices (n_k) est toujours une suite d'indices strictement croissante et vérifie $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$.

Exemple 3.32 (modifié)

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

((x_n) diverge : $|x_{n+1} - x_n| \geq 2$. $\rightarrow$ on peut adapter la demo de $(-1)^n$ diverge.)



Soit $n_k = 2k$, $k \geq 1$

$$\text{Alors, } x_{n_k} = x_{2k} = \underbrace{(-1)^{2k}}_1 \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2k}}_{\rightarrow 0}\right) = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1$$

Par les propriétés algébriques, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 1$, donc 1, est un point d'accumulation de (x_n)

Soit encore $m_k = 2k+1$, $k \geq 0$. Alors, $x_{m_k} = x_{2k+1} = \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) = -\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) \rightarrow -1$. Par les propriétés algébriques,

$$\rightarrow \underbrace{((-1)^2)^k}_{=1} (-1) = -1$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = -1$. Donc, -1 est un point d'accumulation.

Théorème 3.33 : (Théorème de Bolzano - Weierstraß)

toute suite bornée admet une sous-suite convergente
(et donc un point d'accumulation)

Proposition 3.35

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite.

(i) Si (x_n) converge, toutes les sous-suites de (x_n) convergent
vers $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

(iii) Si $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ et $(x_{m_k})_{k \geq 0}$ sont deux sous-suites de (x_n) telles que
 $\{n_k : k \geq 0\} \cup \{m_k : k \geq 0\} = \mathbb{N}$ et

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = l$. Alors, (x_n) converge vers l .

Remarque 3.36

(i) Le premier point est très utile pour montrer qu'une suite diverge: on prend 2 sous-suites qui ont des limites diff érentes et on conclut la divergence de la suite.

Exemple 3.37

(i) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = \begin{cases} \frac{n^2+2}{n^2+4} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n^4+1}{n^4+n^2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Les termes pairs: $n_k = 2k$, $k \geq 1$.

$$x_{n_k} = x_{2k} = \frac{4k^2+2}{4k^2+4} = \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}} \frac{4 + 2/\cancel{k^2}}{4 + 4/\cancel{k^2}} = \frac{4 + \underbrace{2/\cancel{k^2}}_{\rightarrow 0}}{4 + \underbrace{4/\cancel{k^2}}_{\rightarrow 0}} \rightarrow \frac{4}{4} = 1$$

La sous-suite des impairs: $m_k = 2k+1, k \geq 0$

$$x_{m_k} = x_{2k+1} = \frac{(2k+1)^4 + 1}{(2k+1)^4 + (2k+1)^2} = \frac{k^4}{k^4} \frac{(2 + \frac{1}{k})^4 + \frac{1}{k^4}}{(2 + \frac{1}{k})^4 + (\frac{2}{k} + \frac{1}{k^2})^2} \rightarrow \frac{2^4}{2^4} = 1$$

Vue que les deux sous-suites convergent vers la même limite et que les pairs & impairs couvrent tous les entiers, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

(ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_n = \cos(n \cdot \frac{\pi}{2})$. On a

$$x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = -1, x_7 = 0, \dots$$

$$\text{Si } n_k = 4k, \quad x_{n_k} = x_{4k} = \cos\left(4k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2k\pi) = 1. \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 1.$$

$$\text{Si } m_k = 4k+2, \quad x_{m_k} = x_{4k+2} = \cos\left((4k+2) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2k\pi + \pi) = -1 \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = -1. \Rightarrow (x_n) \text{ diverge.}$$

Définition 3.37 1/3 ($\limsup$, $\liminf$)

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. Alors, le plus grand point d'accumulation de (x_n) est appelé le $\limsup$ de (x_n) , qu'on note $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Le plus petit point d'accumulation est appelé $\liminf$ de (x_n) , qu'on note $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Proposition 3.37 2/3

Une suite converge si et seulement si :

- $\square$
- (x_n) est bornée
 - $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

$\triangle$ $x_n = \sin(n)$ $\forall \lambda \in [-1, 1]$, λ est un point d'accumulation de (x_n)